

cess is repeated for various guesses of $dp/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$ until a strip of points ($dp/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$, $dn/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$) with the corresponding trajectories in the n region of the p-n junction is obtained.

With the above method another strip of points ($dn/dx|_{x=0}$, $dp/dx|_{x=0}$) in the $dn/dx|_{x=0}$, $dp/dx|_{x=0}$ -plane with the corresponding trajectories in the p region is also obtained. By comparison of the values of the obtained trajectories in both regions of the p-n junction at $x=20\text{ }\mu\text{m}$, a smaller field in the $dp/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$, $dn/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$ -plane and another in the $dn/dx|_{x=0}$, $dp/dx|_{x=0}$ -plane are determined, in which the unknown initial values are contained.

In the new smaller fields the density of points is increased, the corresponding additional characteristics are then computed, and the comparison is again made in order to obtain much smaller fields with the unknown initial values. The process is repeated un-

til the trajectories in the n and p regions of the p-n junction satisfy the continuity conditions at $x=20\text{ }\mu\text{m}$ with a relative error smaller than 0.2%.

For $J=0$ the two strips of points ($dp/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$, $dn/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}$) and ($dn/dx|_{x=0}$, $dp/dx|_{x=0}$) reduce, because of Eq. (24), to the straight lines

$$\frac{dn/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}}{dp/dx|_{x=40\text{ }\mu\text{m}}} = -\frac{n_n}{p_n}$$

and

$$\frac{dp/dx|_{x=0}}{dn/dx|_{x=0}} = -\frac{p_p}{n_p}$$

respectively, where p_p is the asymptotic value of p in an infinitely long p region.

The computer program used (in ALGOL 60) is fully described in Ref. 16, which includes further details concerning the numerical procedure applied in order to avoid the use of subprograms for the computation with multiple precision.

Zur Bandstruktur von Wismuttellurid*

P. DRATH

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig

(Z. Naturforsch. 23 a, 1146—1154 [1968]; eingegangen am 21. Mai 1968)

The analysis of Shubnikov-De Haas oscillations in n- and p-type Bi_2Te_3 indicate the existence of a multivalley structure of valence and conduction band. In p-type Bi_2Te_3 the surfaces of constant energy are found to consist of 6 ellipsoids. Spin splitting of the Landau-levels was observed, the anisotropy of the g -factor in the trigonal-bisectrix plane is consistent with an existing theory. In n-type Bi_2Te_3 Hall-coefficient, magnetoresistance and g -factor do not follow the predicted pattern of a simple many valley model, so that the number of ellipsoids could not be determined with certainty. The presence of an additional band must be considered.

Für das Leitungs- und Valenzband von Wismuttellurid (Kristallklasse $R\bar{3}m$) wurde von DRABBLE und WOLFE¹ ein Vieltälermodell vorgeschlagen. Danach sollen die Energieextrema in den Spiegelebenen des reziproken Gitters liegen. Die Flächen gleicher Energie im k -Raum sollen Ellipsoide sein, wobei 3 Ellipsoide zu erwarten sind, wenn ihre Mittelpunkte auf den Begrenzungsflächen der Brillouin-Zone liegen, und sonst 6 Ellipsoide. Für sphärische und ellipsoidförmige Energieflächen kann der Zusammenhang zwischen der Energie und dem Wellenzahlvektor in folgender Form geschrieben werden:

$$E = (\hbar^2/2 m_0) k^+ \alpha k. \quad (1)$$

Dabei ist m_0 die Masse des freien Elektrons, k^+ bezeichnet die transponierte Matrix. E rechnet von der Bandkante aus. Der Abstand des Energieextremums vom Nullpunkt des Koordinatensystems im k -Raum wird dabei nicht berücksichtigt. α ist der Tensor der reziproken effektiven Masse:

$$\alpha = (m^*)^{-1}.$$

In dem von Drabble und Wolfe vorgeschlagenen Modell hat α vier Komponenten

$$\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33} \text{ und } \alpha_{23},$$

dabei bezeichnen 1, 2 und 3 die Richtungen parallel zu einer binären Achse, zu einer Bisektrix und zur

* Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Technische Hochschule Braunschweig 1967.

¹ J. R. DRABBLE u. R. WOLFE, Proc. Phys. Soc. London **69**, 1101 [1956].



trigonalen Achse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Die Gl. (1) beschreibt mit den vier Komponenten ein Ellipsoid in der 2–3-Ebene des k -Raumes. Die anderen Ellipsoide ergeben sich durch Tensortransformationen. Je zwei Ellipsoide liegen auf einer Achse, sie werden durch die gleiche Transformation erzeugt, so daß die Flächen gleicher Energie im k -Raum durch insgesamt drei Tensoren beschrieben werden. Das Ergebnis der Transformation ist:

$$\alpha'_{ij}'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \alpha_{11} + \frac{3}{4} \alpha_{22} & \pm \frac{1}{4} \sqrt{3} (\alpha_{22} - \alpha_{11}) & \mp \frac{1}{4} \sqrt{3} \alpha_{23} \\ \pm \frac{1}{4} \sqrt{3} (\alpha_{22} - \alpha_{11}) & \frac{3}{4} \alpha_{11} + \frac{1}{4} \alpha_{22} & -\frac{1}{2} \alpha_{23} \\ \mp \frac{1}{4} \sqrt{3} \alpha_{23} & -\frac{1}{2} \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Die oberen Vorzeichen gelten für α' und die unteren für α'' .

Aus galvanomagnetischen Messungen in schwachen Magnetfeldern bis 77 °K konnte DRABBLE unter Zuhilfenahme thermoelektrischer Daten die Komponenten des Tensors der reziproken effektiven Masse für p-leitendes Wismutellurid berechnen². Für n-leitendes Wismutellurid sind die Ergebnisse unvollständig. DRABBLE et al.³ geben nur die Achsenverhältnisse der Ellipsoide an und einen Winkel der Ellipsoidachse gegen die Kristallachsen. Durch eine Kombination optischer Messungen mit den Ergebnissen Drabbles hat AUSTIN⁴ die Komponenten des Tensors der reziproken effektiven Masse bestimmt.

Gegenüber den Messungen der Transportgrößen in niedrigen Magnetfeldern sind die Quanteneffekte in Festkörpern, die in hohen Magnetfeldern und bei tiefen Temperaturen auftreten können, ein besseres Mittel zur Bandstrukturbestimmung, da der Einfluß der Anisotropie der Streuzeit entfällt.

An p-leitendem Wismutellurid konnten TESTARDI, STILES und BURSTEIN⁵ mit Hilfe des De Haas-Van Alphen-Effektes und LANDWEHR und DRATH⁶ mit Hilfe des Schubnikow-De Haas-Effektes das 6-Ellipsoidmodell bestätigen. Als Schubnikow-De Haas-Effekt bezeichnet man Oszillationen des Widerstandes als Funktion eines äußeren Magnetfeldes bei tiefen Temperaturen. In der vorliegenden Arbeit soll über die Messung der oszillatorischen magnetischen Wider-

standsänderung an n- und p-leitendem Wismutellurid berichtet werden. Erste Ergebnisse wurden bereits veröffentlicht⁷.

1. Schubnikow-De Haas-Effekt

Die Energieeigenwerte für ein freies Elektron im Magnetfeld sind

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \pm \frac{1}{2} \mu_B g B, \quad (3)$$

wenn das Magnetfeld parallel zur z -Richtung liegt. k_z ist die z -Komponente des Wellenzahlvektors, $\omega = eB/m_c^*$ bezeichnet die Zyklotronfrequenz, m_c^* ist die Zyklotronmasse. Sie stellt einen Mittelwert der effektiven Massen in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld dar. Der Elektronenspin führt zu einer Aufspaltung der Eigenwerte um den Betrag

$$\Delta E = \mu_B g B;$$

g wird in der Spektroskopie als Landé-Faktor bezeichnet. μ_B ist das Bohrsche Magneton. Die erlaubten Energieeigenwerte nach Gl. (3) werden als Landau-Niveaus bezeichnet. Im k -Raum bilden sie ein System ineinandergestellter Zylinder. Die Zustände, die ohne Magnetfeld im k -Raum gleichmäßig verteilt sind, liegen bei eingeschaltetem Magnetfeld auf Zylinderoberflächen. Als Folge davon treten Spitzen in der Zustandsdichte als Funktion der Energie auf, die auf der Energieskala den Abstand $\hbar \omega$ haben und die zu Oszillationen in den Transportgrößen in Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld führen⁸.

Nach ADAMS und KEYES⁹ ergibt sich für den oszillatorischen Anteil der Magneto-Leitfähigkeit unter der Voraussetzung sphärischer Energieflächen und Streuung an akustischen Phononen für den Fall, daß keine Übergänge zwischen den verschiedenen Landau-Niveaus auftreten:

$$\frac{\Delta \sigma_2}{\sigma_0} = \frac{3\pi}{8} \left(\frac{\hbar \omega}{\zeta} \right) \sum_M (-1)^M \frac{2\pi^2 M k T / \hbar \omega}{\sinh 2\pi^2 M k T / \hbar \omega} \cdot \cos \left(\frac{2\pi M \zeta}{\hbar \omega} - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{2\pi M}{\omega \tau} \right). \quad (4)$$

² J. R. DRABBLE, Proc. Phys. Soc. London **72**, 380 [1958].

³ J. R. DRABBLE, R. D. GROVES u. R. WOLFE, Proc. Phys. Soc. London **71**, 430 [1958].

⁴ I. G. AUSTIN, Proc. Phys. Soc. London **76**, 169 [1960].

⁵ L. R. TESTARDI, P. J. STILES u. E. BURSTEIN, Solid State Commun. **1**, 28 [1963].

⁶ G. LANDWEHR u. P. DRATH, Physique des semiconducteurs, compt. rend. du 7^e congr. intern., Paris 1964, S. 669.

⁷ P. DRATH u. G. LANDWEHR, Phys. Letters **24 A**, 504 [1967].

⁸ Siehe z. B. O. MADELUNG, Halbleiterprobleme V, S. 87 ff.

⁹ E. N. ADAMS u. R. W. KEYES, Progr. Semiconductors **6**, S. 109.

Für hohe Quantenzahlen, wobei Übergänge zwischen verschiedenen Landau-Niveaus möglich sind, ist

$$\frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{5\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_M \frac{(-1)^M}{\sqrt{2\pi M}} \frac{2\pi^2 M k T / \hbar \omega}{\sinh 2\pi^2 M k T / \hbar \omega} \cdot \cos \left(\frac{2\pi M \zeta}{\hbar \omega} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \exp \left(- \frac{2\pi M}{\omega \tau} \right). \quad (5)$$

Zwischen den beiden Gleichungen besteht eine Phasenverschiebung von $\pi/4$. Bei Streuung an ionisierten Störstellen ändert sich die Amplitude nur wenig, während Periode und Phase unbeeinflusst bleiben. Als Periode bezeichnet man den Abstand der Extremwerte des Widerstandes auf einer Skala mit reziproker magnetischer Induktion. Da in Gl. (4) und (5) in praktischen Fällen das Glied mit $M=1$ dominiert, ergibt sich die Periode zu

$$P = e \hbar / m_c^* \zeta. \quad (6)$$

2. Zyklotronmassen

Die Zyklotronmassen für eine $E(k)$ -Beziehung nach (1) sind von der Form

$$m_c^* = \left(\frac{|m|}{\hbar + m \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

dabei ist m der Massentensor, $|m|$ die Determinante seiner Komponenten und \hbar der Einheitsvektor in Magnetfeldrichtung. Für das Drabblsche Modell erhält man die Winkelabhängigkeit der Zyklotronmassen, wenn man

$$\alpha^{-1}, \alpha'^{-1} \quad \text{und} \quad \alpha''^{-1}$$

in (7) einsetzt. So ergibt sich z. B. bei einer Drehung des Magnetfeldes in der Spiegelebene des Gitters

$$\begin{aligned} (m_0/m_c^*)^2 &= (\alpha_{11} \alpha_{33} - \alpha_{13}^2) \sin^2 \Theta \\ &+ (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2) \cos^2 \Theta \\ &+ 2(\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}) \sin \Theta \cos \Theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Θ bezeichnet den Winkel, den die Magnetfeldrichtung mit der trigonalen Achse des Kristalls bildet. Mit den transformierten Ellipsoiden α' und α'' erhält man

$$\begin{aligned} (m_0/m_c'^*)^2 &= (m_0/m_c''^*)^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{4} \alpha_{11} + \frac{3}{4} \alpha_{22} \right) \alpha_{33} - \frac{3}{4} \alpha_{23}^2 \right] \sin^2 \Theta \\ &+ \alpha_{11} \alpha_{22} \cos^2 \Theta + \alpha_{11} \alpha_{23} \sin \Theta \cos \Theta. \end{aligned} \quad (8')$$

Es ergeben sich in diesem Fall zwei Zyklotronmassen. In einer beliebigen Richtung sind 3 Zyklotronmassen zu erwarten.

In den Hauptachsen des Kristallsystems haben die Zyklotronmassen folgende Werte:

1. Wenn das Magnetfeld parallel zur trigonalen Achse liegt

$$m_c^* = m_c'^* = m_c''^* = m_0 / \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}}, \quad (9)$$

2. parallel zur Bisektrix

$$m_c^* = m_0 / \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{33}} \quad \text{und} \quad (10)$$

$$m_c'^* = m_c''^* = m_0 / \sqrt{\left(\frac{1}{4} \alpha_{11} + \frac{3}{4} \alpha_{22} \right) \alpha_{33} - \frac{3}{4} \alpha_{23}^2}. \quad (11)$$

3. für das Magnetfeld parallel zur binären Achse

$$m_c^* = m_0 / \sqrt{\alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{23}^2} \quad \text{und} \quad (12)$$

$$m_c'^* = m_c''^* = m_0 / \sqrt{\left(\frac{3}{4} \alpha_{11} + \frac{1}{4} \alpha_{22} \right) \alpha_{33} - \frac{1}{4} \alpha_{23}^2}. \quad (13)$$

3. Versuche an p-leitendem Wismuttellurid

Um die Orientierungsabhängigkeit des Schubnikow-De Haas-Effektes zu bestimmen, wurden Messungen an einer Probe ausgeführt, die im Magnetfeld gedreht werden konnte. Die Versuche wurden mit der p-leitenden Probe XXII ausgeführt. Bei dieser Probe konnte die Spinaufspaltung der Widerstandsmaxima in der Orientierung des Magnetfeldes parallel zur trigonalen Achse beobachtet werden¹⁰. Die Ladungsträgerkonzentration ist $p = 6,6 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. Dabei wurde die gleiche Apparatur benutzt wie bei den Messungen in den Hauptachsen des Kristallsystems. Die Probe wurde in ein Plexiglasröhrchen von 6,8 mm Länge und einem Innendurchmesser von 1,6 mm eingebaut. Das Röhrchen wurde mit der Längsachse transversal zum Magnetfeld in einer Halterung drehbar festgeklammert. Mit einer Heliumfüllung konnte der Schubnikow-De Haas-Effekt nur in einer Orientierung gemessen werden. Nach dem Aufwärmen wurde die Halterung aus dem Kryostaten herausgenommen und das Röhrchen ein Stück weitergedreht. Dann konnte die nächste Messung gemacht werden. Das Verfahren ist recht zeitraubend, es gestattet aber, die Orientierungsabhängigkeit der Widerstandssoszillationen bei Induktionen bis zu $18,5 \text{ Vs/m}^2$ zu messen. Die Versuche wurden mit dem Magnetfeld parallel zur trigonalen Achse begonnen und bis zu einer Verdrehung von 188° um die binäre Achse ausgeführt. Dabei wurde die transversale magnetische Widerstandsänderung gemessen.

Die Lage der Widerstandsmaxima in Abhängigkeit von der Orientierung des Magnetfeldes ist in Abb. 1 wiedergegeben. In Abb. 2 ist die Winkelabhängigkeit der Zyklotronmassen bei der Drehung des Magnetfeldes in der Spiegelebene des Gitters dargestellt. Die eingetragenen Kreise sind die experimentellen Werte. Die ausgezeichneten Kurven

¹⁰ G. LANDWEHR u. P. DRATH, Z. Angew. Phys. **20**, 392 [1966].

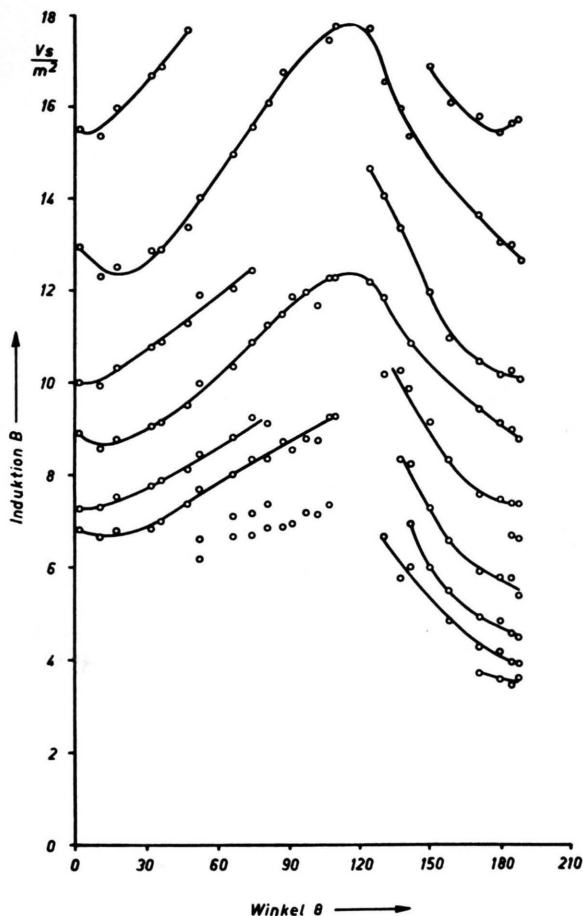


Abb. 1. Die Lage der Widerstandsmaxima als Funktion des Drehwinkels für die p-leitende Probe XXII. Gemessen wurde die transversale magnetische Widerstandsänderung. Das Magnetfeld wird in der Spiegelebene des Gitters gedreht. Θ rechnet von der trigonalen Achse aus.

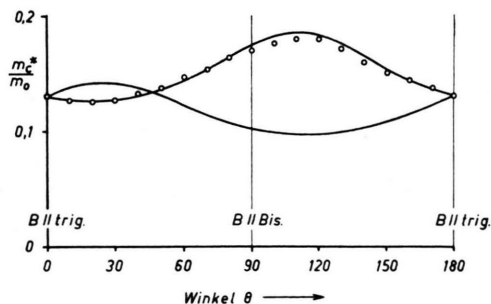


Abb. 2. Zyklotronmassen als Funktion des Winkels für eine Drehung des Magnetfeldes in der Spiegelebene des Gitters für Probe XXII. Die ausgezeichneten Kurven sind mit den Werten von Testardi gerechnet, die Kreise bezeichnen die gemessenen Werte.

zeigen die nach dem Modell von Drabble und Wolfe mit den Werten von Testardi berechneten Zyklotronmassen. Der Vergleich der gerechneten und gemessenen Ergebnisse zeigt eine gute Übereinstimmung. Die Abweichungen betragen im Höchstfall 3–4% und liegen damit innerhalb der von Testardi angegebenen Fehlergrenzen. Auffallend ist, daß von den beiden Zyklotronmassen, die zu erwarten sind, nur die doppelt auftretende zu beobachten ist ($m_c'^*$ und $m_c''^*$). Nach Adams und Keyes sollte aber von zwei Zyklotronmassen immer die kleinere dominieren, da die Dämpfung der Oszillationen exponentiell mit der Masse wächst.

Eine Spinaufspaltung konnte im Bereich von $\Theta = 70^\circ$ bis $\Theta = 140^\circ$ nicht beobachtet werden. Die Ursache liegt nicht in einer starken Winkelabhängigkeit des g -Faktors, da prinzipiell die Größe $\mu_B g$ Werte annehmen könnte, die eine Aufspaltung nicht beobachtbar machen. Vielmehr verschwindet die Amplitude einer der beiden Perioden, während die andere erhalten bleibt. SIMON und FREUDENHAMMER¹¹ haben die Anisotropie des g -Faktors in Analogie zur Theorie von COHEN und BLOUNT¹² berechnet und geben den in Abb. 3 eingezeichneten Verlauf an. g_2 bezeichnet dabei den g -Faktor für die doppelt auftretende Zyklotronmasse, deren Widerstandsoszil-

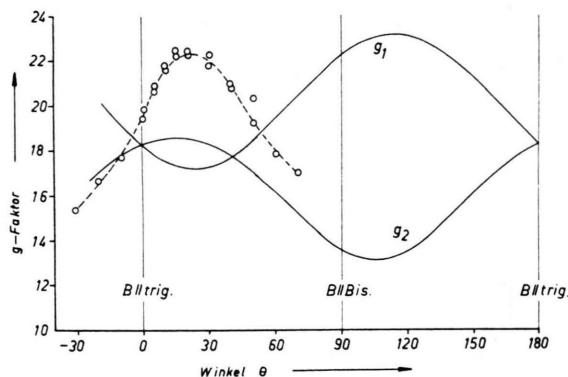


Abb. 3. Winkelabhängigkeit des g -Faktors für eine Drehung des Magnetfeldes in der Spiegelebene des Gitters. Die ausgezogenen Linien sind von Simon und Freudenhammer berechnet, die gestrichelte Linie verbindet die Meßwerte.

lationen beobachtet werden. Der experimentell gefundene g -Faktor hat einen ähnlichen Verlauf wie g_2 . Die Abweichungen betragen etwa 20%. Die Übereinstimmung muß unter Berücksichtigung der Meßgenauigkeit und der in der Theorie gemachten

¹¹ A. FREUDENHAMMER, Diplomarbeit, Aachen 1967.

¹² M. H. COHEN u. E. I. BLOUNT, Phil. Mag. 5, 115 [1960].

Voraussetzungen als befriedigend bezeichnet werden. Die Spinaufspaltung am $p\text{-Bi}_2\text{Te}_3$ führt zu einer Überschneidung der Widerstandsmaxima benachbarter Quantenzahlen. Diese Möglichkeit war in ¹⁰ noch offen gelassen.

4. Messungen an n-leitenden Proben

Die Proben für die Schubnikow-De Haas-Messungen an $n\text{-Bi}_2\text{Te}_3$ wurden aus einem Kristall geschnitten, der mit einem Zusatz von BiI_3 dotiert war. Die magnetische Widerstandsänderung in den Hauptachsenrichtungen des Kristallsystems bei tiefen Temperaturen sind in Abb. 4 und 5 wiedergegeben. Die Qualität der Oszillationen ist besser als die bei den Versuchen mit p-leitenden Kristallen. Die reziproken Induktionen der Widerstandsmaxima für die Orientierung B parallel zur trigonalen Achse haben alternierende Abstände, deren Differenzen außerhalb der Meßunsicherheit liegen. Die Amplitude der Oszillationen wächst in Schritten von zwei Maxima. Beide Erscheinungen deuten auf eine Spinaufspaltung hin. Damit ergibt sich die Periode zu

$$P = 5,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{Vs}.$$

Wenn das Magnetfeld parallel zur binären Achse liegt, ist

$$P = 6,15 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{Vs}$$

und für B parallel zur Bisektrix ist

$$P = 3,88 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{Vs}.$$

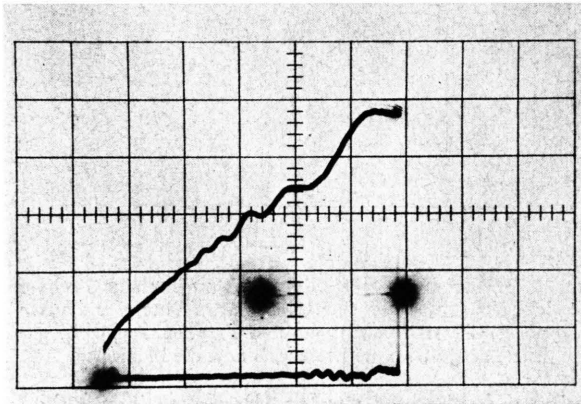


Abb. 4. Widerstand der n-leitenden Probe LX als Funktion eines transversalen Magnetfeldes. B liegt parallel zur trigonalen Achse. Eine Eichspannung von 2 V ist mitphotographiert. Horizontalablenkung $2,14 \text{ Vs/m}^2$ pro großer Teilung. Die Werte $\zeta/\hbar \omega$ sind in Abb. 8 wiedergegeben.

¹³ E. BRAUN, Dissertation, Technische Hochschule Braunschweig 1967.

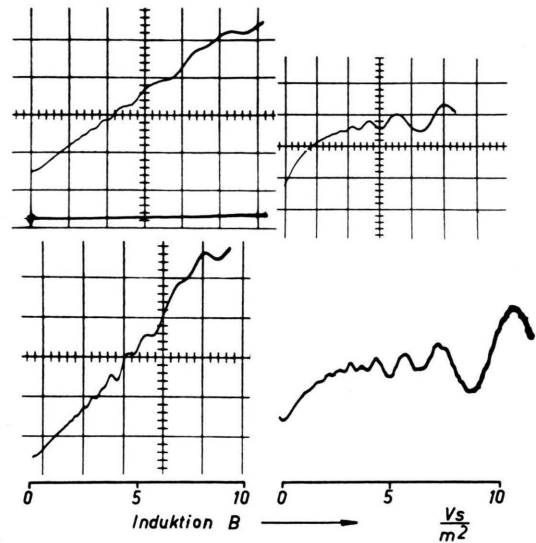


Abb. 5. Widerstand n-leitender Proben als Funktion eines Magnetfeldes. Rechte Seite Longitudinalmessungen, linke Seite Transversalmessungen. Oben $B \parallel$ binäre Achse, unten $B \parallel$ Bisektrix. Oben links Probe LXXIII, oben rechts Probe LXVII, unten links Probe LXX, unten rechts Probe LXXV. Der Nullpunkt mit dem Rücklauf ist außer bei der Messung an Probe LXXIII unterdrückt. Die Messungen an Probe LXXV wurden bei $2,5^\circ\text{K}$ ausgeführt, die anderen Messungen bei $4,2^\circ\text{K}$.

Die Orientierungsabhängigkeit der Widerstandsoszillationen wurde mit einer drehbaren transversalen Magnetspule gemessen, deren Einzelheiten von BRAUN¹³ beschrieben wurden. Die Winkelabhängigkeit der Widerstandsmaxima für die Drehung des Kristalls um die Bisektrix und die binäre Achse sind in Abb. 6 und 7 wiedergegeben. Zur Berechnung der Komponenten von α sind vier unabhängige Meßgrößen erforderlich. Da parallel zur Bisektrix und zur binären Achse je zwei Zyklotronmassen auftreten können, ist die Zuordnung der gemessenen Perioden mehrdeutig. In der Orientierung B parallel zur Bisektrix konnten im mittleren Feldstärkebereich bei $2,4^\circ$ zusätzliche Maxima aufgelöst werden, die zu einer Periode von etwa $7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{Vs}$ gehören. Damit lassen sich die bei $4,2^\circ\text{K}$ gemessenen Perioden mit Hilfe der Beziehungen (9) bis (13) in folgender Weise festlegen:

$$P_{\text{trig}}^2 = (e^2 \hbar^2 / m_0^2 \zeta^2) \alpha_{11} \alpha_{22} = 33,06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4/\text{V}^2 \text{ s}^2, \quad (14)$$

$$P_{\text{bin}}^2 = (e^2 \hbar^2 / m_0^2 \zeta^2) \left[\left(\frac{3}{4} \alpha_{11} + \frac{1}{4} \alpha_{22} \right) \alpha_{33} - \frac{1}{4} \alpha_{23}^2 \right] = 37,82 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4/\text{V}^2 \text{ s}^2, \quad (15)$$

$$P_{\text{Bis}}^2 = (e^2 \hbar^2 / m_0^2 \zeta^2) \left[\left(\frac{1}{4} \alpha_{11} + \frac{3}{4} \alpha_{22} \right) \alpha_{33} - \frac{3}{4} \alpha_{23}^2 \right] = 15,05 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4/\text{V}^2 \text{ s}^2. \quad (16)$$

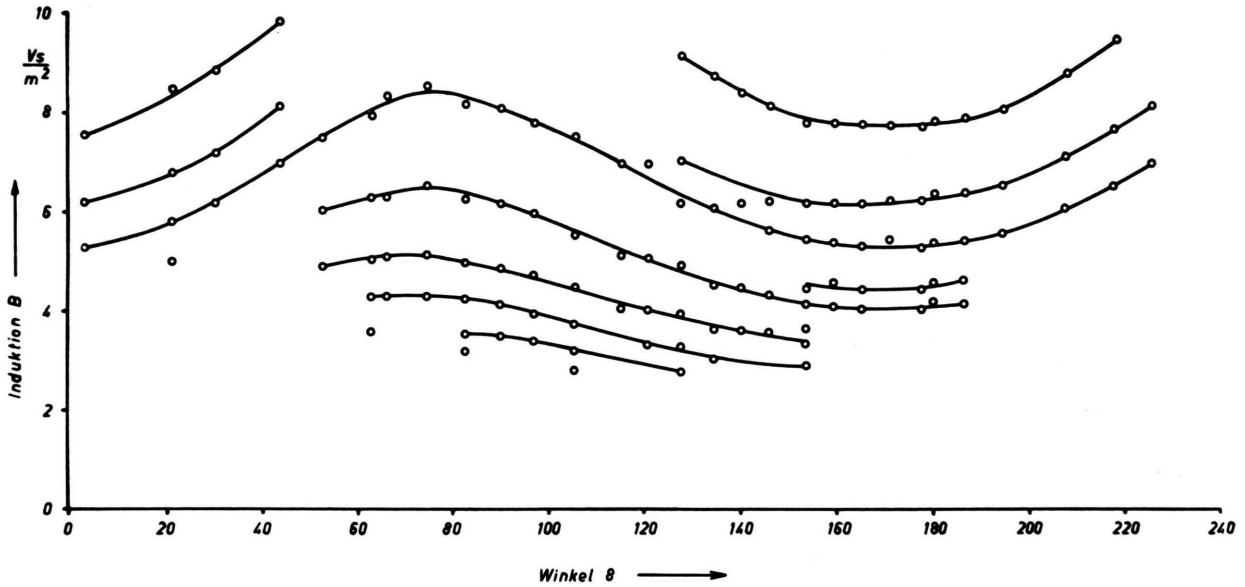


Abb. 6. Winkelabhängigkeit der Widerstandsmaxima der transversalen magnetischen Widerstandsänderung bei der Drehung der Probe LXXIV. Das Magnetfeld liegt dabei in der Spiegelebene des Gitters. θ rechnet von der trigonalen Achse aus.

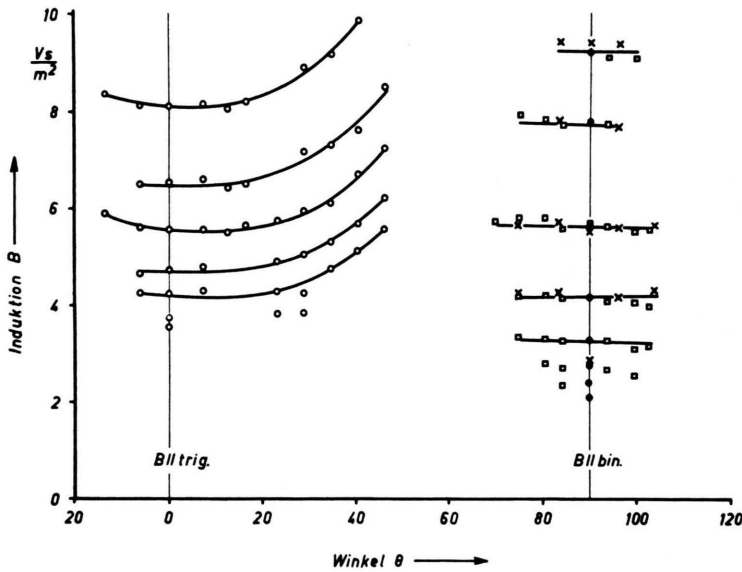


Abb. 7. Winkelabhängigkeit der Widerstandsmaxima der transversalen magnetischen Widerstandsänderung bei der Drehung der Proben um die Bisektrix.

Genau wie bei p-leitendem Wismuttellurid dominieren auch beim n-leitenden Wismuttellurid die doppelt auftretenden Zyklotronmassen. Aus der Winkelabhängigkeit der Schubnikow-De Haas-Oszillationen bei der Drehung des Magnetfeldes in der Spiegelebene des Gitters ergibt sich

$$(e^2 \hbar^2 / m_0^2 \zeta^2) \alpha_{11} \alpha_{23} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / \text{Vs}^2. \quad (17)$$

Damit können die Komponenten von α berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 20,70 \cdot 10^{-2} \zeta m_0 / \hbar e, \\ \alpha_{22} &= 1,60 \cdot 10^{-2} \zeta m_0 / \hbar e, \\ \alpha_{33} &= 2,38 \cdot 10^{-2} \zeta m_0 / \hbar e, \\ \alpha_{23} &= 0,36 \cdot 10^{-2} \zeta m_0 / \hbar e. \end{aligned} \quad (18)$$

Aus der Periode des Schubnikow-De Haas-Effektes können keine Absolutwerte für α bestimmt werden. Bezogen auf α_{22} ergeben sich die Relativwerte:

$$\alpha_{11}/\alpha_{22} = 12,9; \alpha_{33}/\alpha_{22} = 1,49; \alpha_{23}/\alpha_{22} = 0,226. \quad (19)$$

Aus den bisherigen Ergebnissen läßt sich die Dichte der Ladungsträger in einem Energieminimum berechnen. Wenn man die bekannte Beziehung zwischen Fermi-Energie und Dichte, die bei tiefen Temperaturen gültig ist, in (6) einsetzt, ergibt sich

$$n^{\frac{2}{3}} = \frac{2 m_d \hbar e}{h^2 P m_c^*} \left(\frac{3}{8 \pi} \right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (20)$$

m_d ist die Zustandsdichtemasse pro Ellipsoid und n die Ladungsträgerdichte pro Ellipsoid. m_d und m_c^* sind bis auf den gleichen Faktor unbestimmt, der sich herauskürzt.

Für ein 6-Ellipsoidmodell ist

$$n = 3,9 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3},$$

für ein 3-Ellipsoidmodell wäre n um den Faktor 2 kleiner.

Die Größen $\zeta/\hbar \omega$ für die Widerstandsmaxima können ebenfalls aus den Relativwerten bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 8 und 9 für

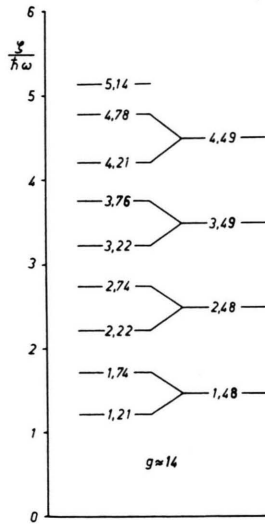


Abb. 8. $\zeta/\hbar \omega$ für die Maxima der transversalen magnetischen Widerstandsänderung der n-leitenden Probe LX.

die Orientierung des Magnetfeldes parallel zur trigonalen und binären Achse wiedergegeben. Parallel zur trigonalen Achse beträgt die Spinaufspaltung

$$m_c^* g/2 m_0 = 0,53.$$

Faßt man die Werte $\zeta/\hbar \omega = 1,97$ und $1,22$ der Longitudinalmessung für B parallel zur binären

Achse zusammen (Abb. 9), so ergibt sich eine Aufspaltung von

$$m_c^* g/2 m_0 = 0,75.$$

Der Wert für das nicht aufgespaltene Niveau ist $\zeta/\hbar \omega = 1,59$.

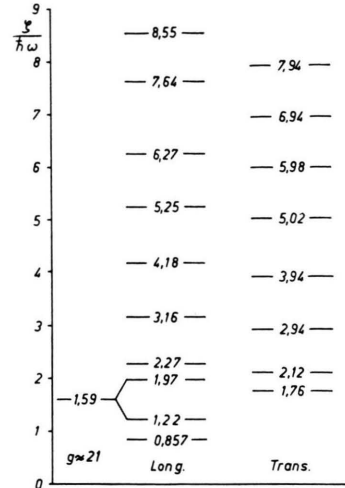


Abb. 9. $\zeta/\hbar \omega$ für die Maxima der magnetischen Widerstandsänderung in der Orientierung $B \parallel$ binäre Achse. Links Longitudinalmessung Probe LXXVII, rechts Transversalmessung Probe LXXV.

Der Versuch, die Absolutwerte der Zyklotronmassen aus der Temperaturabhängigkeit der Amplitude der Oszillationen zu bestimmen, war erfolglos. Unterhalb von $4,2^\circ \text{K}$ ist die Amplitude praktisch temperaturunabhängig und oberhalb von $4,2^\circ \text{K}$ konnte mit der verwendeten Apparatur nicht gemessen werden. In jüngerer Zeit sind Messungen des De Haas-Van Alphen-Effektes an n-Wismuttellurid bekannt geworden von MALLINSON, RAYNE und URE¹⁴. Die Autoren konnten die Absolutwerte der Zyklotronmassen aus der Temperaturabhängigkeit der Amplitude der Oszillationen bestimmen.

In Tab. 1 sind die Komponenten von α aus den Schubnikow-De Haas-Effektmessungen und den De Haas-Van Alphen-Effektmessungen gegenübergestellt. Dabei wurden die Zustandsdichtemessungen aus den

	α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{23}
De Haas-Van Alphen-Effekt	36,2	4,25	6,93	1,54
Schubnikow-De Haas-Effekt	48,6	3,75	5,59	0,85

Tab. 1.

¹⁴ R. B. MALLINSON, I. A. RAYNE u. R. W. URE JR., Phys. Letters **19**, 545 [1965]; **24 A**, 713 [1967].

De Haas-Van Alphen-Messungen benutzt, um die Absolutwerte für α aus den Schubnikow-De Haas-Messungen zu berechnen. Die Unterschiede in den Ergebnissen geben etwa die Meßunsicherheit wieder. Für die Fermi-Energie erhält man

$$\zeta = 2,72 \cdot 10^{-2} \text{ eV.}$$

Aus der Spinaufspaltung für B parallel zur trigonalen Achse ergibt sich für diese Anpassung ein $|g|$ -Faktor von $|g| = 14$. Grundsätzlich ist auch beim n -leitenden Wismutellurid eine Zusammenfassung überkreuzter Maxima möglich. In diesem Fall beträgt der $|g|$ -Faktor $|g| = 40$. Für die Orientierung B parallel zur binären Achse ist der $|g|$ -Faktor $|g| = 21$. Diese Werte unterscheiden sich von den in ⁷ angegebenen. Mallinson, Rayne und Ure haben inzwischen ihre Bandparameter geändert und erhalten damit eine von $0,129 m_0$ auf $0,101 m_0$ geänderte Zustandsdichtemasse.

5. Klassische galvanomagnetische Effekte

Die Frage, ob die Flächen konstanter Energie im k -Raum durch 3 oder 6 Ellipsoide dargestellt werden, kann möglicherweise durch einen Vergleich der Ladungsträgerdichten beantwortet werden, die sich aus dem Schubnikow-De Haas-Effekt und aus dem Hall-Effekt ergeben. Die Hall-Effektmessungen wur-

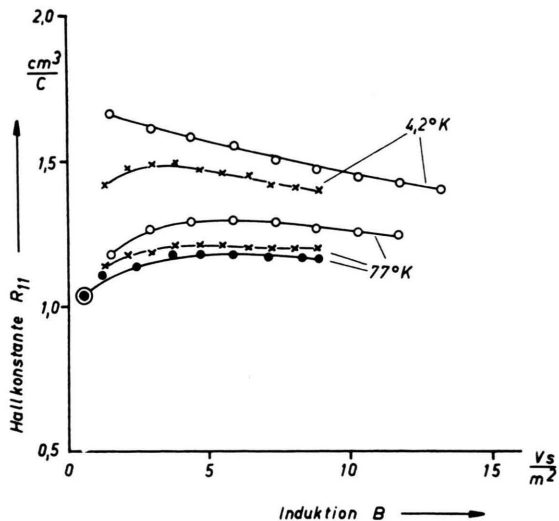


Abb. 10. Feldabhängigkeit des Hall-Effektes für n -leitende Proben bei 77°K und $4,2^\circ\text{K}$. Der groß gezeichnete Meßpunkt wurde an Probe LXXVI im Feld eines konventionellen Magneten bestimmt. $\circ \circ \circ \circ$ Probe LXII ohne Wismutpillen, $\bullet \bullet \bullet \bullet$ Probe LXXVI, $\times \times \times \times$ Probe LXXVII, beide mit kleinen Wismutpillen als Kontakte.

den in niedrigen Magnetfeldern bis 77°K ausgeführt und in hohen Feldern bei 77°K und bei $4,2^\circ\text{K}$. Die Ergebnisse für $n\text{-Bi}_2\text{Te}_3$ sind in Abb. 10 zusammengefaßt. Die Bi_2Te_3 -Proben wurden normalerweise mit Hilfe von Wismutpillen kontaktiert. Um Verfälschungen durch zu große Kontakte zu vermeiden, wurden für die Hall-Effektmessungen Proben mit besonders kleinen Wismutpillen präpariert. Bei Probe LXII gelang die Kontaktierung ohne Wismutpillen. Auffallend ist die Diskrepanz der Hall-Daten in niedrigen und hohen Magnetfeldern und der Unterschied bei 77°K und $4,2^\circ\text{K}$. Der Zusammenhang zwischen Ladungsträgerdichte und Hall-Konstante in schwachen Magnetfeldern ist

$$R_H = f \cdot r / n e, \quad (21)$$

wobei r der übliche Faktor ist, der vom Streumechanismus abhängt und f ein Anisotropiefaktor³. In starken Feldern ist

$$R_H = 1 / n e. \quad (22)$$

Der Faktor f beträgt etwa 0,3. Die Hall-Konstante sollte in hohen Feldern dreimal so groß sein wie in niedrigen Feldern. Der gemessene Unterschied beträgt aber nur etwa 20%. Die in niedrigen Feldern gemessene Hall-Konstante würde für ein 3-Ellipsoidmodell sprechen und die in hohen Feldern gefundene für ein 6-Ellipsoidmodell. Da der Hall-Effekt in starken Feldern die Ladungsträgerdichte unabhängig von der Form der Energieflächen und unabhängig vom Streumechnanismus wiedergibt, scheint ein 6-Ellipsoidmodell eine größere Wahrscheinlichkeit zu haben. Bei $4,2^\circ\text{K}$ ist die Hall-Konstante etwa 20% größer als bei 77°K . In hohen Magnetfeldern sollte aber die Hall-Konstante für beide Temperaturen dem gleichen Wert zustreben, wenn die Zahl der Ladungsträger konstant bleibt.

Für p -leitendes Wismutellurid ergeben die Hall-Effektmessungen in hohen Magnetfeldern eine Ladungsträgerkonzentration, die um 25% höher liegt als die aus den Hall-Effektmessungen in niedrigen Feldern⁶. Die Abweichungen werden vermutlich durch die Probengeometrie und die Wismutkontakte verursacht.

Außer dem Hall-Effekt zeigt die klassische magnetische Widerstandsänderung bei $n\text{-Bi}_2\text{Te}_3$ ein anomales Verhalten. Die longitudinale magnetische Widerstandsänderung geht wie zu erwarten bei 77°K und bei $4,2^\circ\text{K}$ in die Sättigung. Die transversale magnetische Widerstandsänderung geht in keiner Orientierung des Magnetfeldes in die Sättigung (Abb. 4 und

Abb. 5), weder bei 77 °K noch bei 4,2 °K. Dieses Ergebnis steht in einem auffallenden Gegensatz zu einer vorhandenen Theorie der magnetischen Widerstandsänderung. HÜBNER¹⁵ hat die Rechnungen von HERRING und VOGT¹⁶ auf Wismutellurid übertragen. Danach ergibt sich, daß die Sättigung der longitudinalen magnetischen Widerstandsänderung nur vom Verhältnis der $(\alpha\tau)_{ik}$ abhängt, wobei τ der Streuzeitensor ist. Nach Hübner sollte die transversale magnetische Widerstandsänderung bei 4,2 °K für B parallel zur Bisektrix und B parallel zur binären Achse gegen die gleichen Sättigungswerte wie die longitudinale Widerstandsänderung gehen, wenn die Richtung des Stromes senkrecht zur trigonalen Achse liegt. Die gemessenen Kurven zeigen aber ein völlig anderes Verhalten (Abb. 4 und 5). Die transversale Widerstandsänderung geht nicht in die Sättigung. Der Widerstand ist dem Magnetfeld angenähert proportional. Während die longitudinalen Sättigungswerte ϱ_B/ϱ_0 zwischen 1,2 und 2 liegen, wurden im Transversalfall Widerstandsänderungen $\varrho_B/\varrho_0 > 6,8$ gemessen. Dieses Ergebnis ist deshalb bemerkenswert, weil die Rechnungen von Hübner beim p-leitenden Bi_2Te_3 durch die Experimente bestätigt werden. Beim p-leitenden Wismutellurid geht die transversale magnetische Widerstandsänderung in die Sättigung.

Eine mögliche Ursache für das ungewöhnliche Verhalten der galvanomagnetischen Effekte könnte das Vorhandensein einer zweiten Sorte von Ladungsträgern sein. Ein Zweiladungsträgermodell für n- Bi_2Te_3 ist von URE¹⁷, MOOSER und PEARSON¹⁸, WALKER¹⁹ und BIRKHOLZ und HAACKE²⁰ vorgeschla-

gen worden. Wenn man annimmt, daß die 2. Ladungsträgersorte eine kleine Beweglichkeit hat, ist das Fehlen der dazugehörigen Widerstandsoszillationen und die Feldabhängigkeit des Hall-Effektes qualitativ verständlich.

MALLINSON, RAYNE und URE¹⁴ haben die Ladungsträgerdichte aus Hall-Effektmessungen und aus Messungen des De Haas-Van Alphen-Effektes bestimmt. Bis zu einer Elektronenkonzentration von $4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ergeben beide Verfahren den gleichen Wert. Bei höheren Ladungsträgerdichten werden Abweichungen beobachtet. Die Autoren schließen auf die Anwesenheit zusätzlicher Elektronen mit geringerer Beweglichkeit. Das zweite Leitungsband soll 30 meV über dem Minimum liegen, dessen Elektronen die oszillatorischen Effekte verursachen.

Die frühere Annahme eines einfachen 6-Ellipsoidmodells stützt sich auf Messungen der Thermokraft von GOLDSMID²¹. Dabei zeigt sich eine auffallende Abhängigkeit der Zustandsdichtemasse von der Ladungsträgerkonzentration, die viel größer ist als sonst bei Halbleitern mit nicht parabolischen Bändern.

Mögliche weitere Hinweise werden vielleicht Messungen der Anisotropie des g -Faktors von n- Bi_2Te_3 geben.

Die Arbeit wurde von Dr. G. LANDWEHR angeregt. Dafür und für wertvolle Hinweise und Diskussionen danke ich Herrn Dr. LANDWEHR. Die verwendeten Einkristalle wurden freundlicherweise von Herrn Dr. J. BURMEISTER, Philips Zentrallaboratorium Aachen, zur Verfügung gestellt.

¹⁵ U. HÜBNER, Z. Naturforsch. **22 a**, 2086 [1967].

¹⁶ C. HERRING u. E. VOGT, Phys. Rev. **101**, 944 [1956].

¹⁷ R. W. URE JR., Rep. Intern. Conf. Physics of Semiconductors, London 1962, S. 659.

¹⁸ E. MOOSER u. W. B. PEARSON, J. Phys. Chem. Solids **7**, 65 [1958].

¹⁹ P. A. WALKER, Proc. Phys. Soc. London **76**, 113 [1960].

²⁰ U. BIRKHOLZ u. G. HAACKE, Z. Naturforsch. **17 a**, 161 [1962]; **18 a**, 638 [1963].

²¹ H. J. GOLDSMID, Proc. Phys. Soc. London **71**, 633 [1958].